ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1984

MATHEMATIQUES I

(3 pages dactylographiées)

P'

Toutes les suites et fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles.

Notations

Pour toute fonction f et tout entier naturel n, le symbole f^n désigne la fonction qui à x associe $(f(x))^n$.

On note E_0 l'ensemble des applications continues de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$; f étant un élément de E_0, l'intégrale (éventuelle) $\int_0^1 f(x)\,dx$ sera notée en abrégé $I(f)$.

On désigne par E_1 l'ensemble des éléments f de E_0 tels que l'intégrale $I(f)$ soit absolument convergente, et par E_2 l'ensemble des éléments f de E_0 tels que l'intégrale $I(f^2)$ soit convergente.

Première Partie

I.1. Montrer que, pour tout $f \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$a_n(f) = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

est convergente.

I.2. Soit $f \in E_1$; établir que $\lim_{n \to +\infty} a_n(f) = 0$.

On pourra partager l'intervalle $[0,1]$ en deux parties.

I.3. Soit α et β deux réels vérifiant : $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.
Démontrer qu'il existe un polynôme P du second degré satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\forall x \in]\alpha, \beta[, \quad P(x) > 1$
b) $\forall x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1], \quad 0 \leqslant P(x) \leqslant 1.$

Un tel P étant choisi, que dire de

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta P^n(x)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}) \ ?$$

I.4. a) Soit $f \in E_1$. On suppose qu'il existe trois constantes ε, α, β, avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, pour lesquelles $\forall x \in [\alpha, \beta], \quad f(x) \geqslant \varepsilon$.

Soit alors P un polynôme satisfaisant aux conditions imposées dans I.3. Quelle est la limite, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, de $I(f P^n)$?

b) Soit $f \in E_1$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$. Etablir que $f = 0$.

c) Que dire d'un élément f de E_1 tel que tous les $a_n(f)$ soient nuls à partir d'un certain rang ?

Deuxième partie

II.1. Calculer, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx\,dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx\,dx$.

II.2. On donne une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1}$$

.../...

a) Etablir la formule :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, a_k \sin \left(\frac{\pi}{4} - (k + \frac{1}{2}) x \right) \right)^2 dx = - \pi c_n .$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n| \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$

c) En écrivant c_n sous forme de l'intégrale sur [0,1] d'un polynôme convenable, trouver le signe de c_n . Quand a-t-on $c_n = 0$?

II.3. Soit f et g deux éléments de E_2 ; établir que l'intégrale I (fg) est absolument convergente et que :

$$(I(fg))^2 \leqslant I(f^2)\, I(g^2)$$

On pourra, pour prouver le second point, observer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad I((f + \lambda g)^2) \geqslant 0$$

II.4. Démontrer que $E_2 \subset E_1$. L'inclusion est-elle stricte ?

II.5. Soit $f \in E_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $a_n(f) = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$ sera dans cette seule question notée en abrégé a_n.

a) Etablir : $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) f(x)\,dx$

b) A l'aide de II.2.b, en déduire l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant \pi I(f^2).$$

Quelle est la nature de la série de terme général a_n^2 ?

Troisième Partie

Pour tout $f \in E_2$, *on pose :* $\sigma(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(f))^2$.

On se propose de déterminer la borne inférieure μ *et la borne supérieure* M *du quotient*

$$\frac{\sigma(f)}{I(f^2)}$$

lorsque f *décrit l'ensemble des éléments non nuls de* E_2.

III.1. Soit $p > 1$ et soit f_p l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\forall x \in [0, \frac{1}{p}[, \quad f_p(x) = \sqrt{p}$$

$$\forall x \in]\frac{1}{p}, 1[, \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Etablir que $f_p \in E_2$ et calculer $I(f_p^2)$; donner une majoration simple de $a_n(f_p)$, puis de $\sigma(f_p)$. En déduire la valeur de μ .

Existe-t-il $f \in E_2$ telle que $\frac{\sigma(f)}{I(f^2)} = \mu$?

III.2. Dans cette question et la suivante, r est un élément de $[0, \frac{1}{2}[$ et g_r l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_r(x) = (1-x)^{r-1/2}$.

.../...

a) Montrer que $g_r \in E_1$. Pour quelles valeurs de r a-t-on $g_r \in E_2$?

Donner alors $I(g_r^2)$.

b) Trouver pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre $a_n(g_r)$ et $a_{n-1}(g_r)$.

c) On pose : $r + \frac{1}{2} = s$. Quels sont, pour $t > -1$, le signe de

$$(1+t)^s - 1 - st \quad \text{et celui de} \quad (1+t)^{-s} - 1 + st \ ?$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(r) = n^s a_n(g_r) \quad \text{et} \quad v_n(r) = (n+1)^s a_n(g_r).$$

Etablir que les 2 suites $n \mapsto u_n(r)$ et $n \mapsto v_n(r)$ sont strictement monotones, l'une décroissante et l'autre croissante, et ont une même limite $A(r)$.

e) Etablir : $\forall r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $M \geqslant (A(r))^2$. On commencera par chercher une minoration de $\sigma(g_r)$.

III.3. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{r \to 0} a_n(g_r) = a_n(g_0)$

b) En déduire : $\lim_{r \to 0} A(r) = A(0)$

c) On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \, dt$. Trouver une relation simple entre J_m et J_{m-2} $(m \geqslant 2)$.

Montrer que le produit $m J_m J_{m-1}$ est constant et donner sa valeur. En déduire :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{\frac{\pi}{2(m+1)}} \leqslant J_m \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$$

d) Exprimer $a_n(g_0)$ à l'aide d'une intégrale J_m.

Quelle est la valeur de $A(0)$?

III.4. Déterminer M.